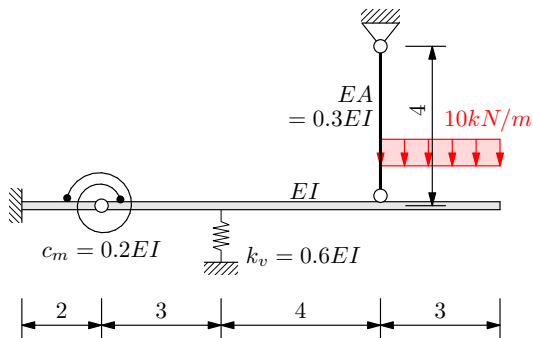


Poglavlje 6

Testovi

6.1 Test 28.06.2014

Zadatak 1 Konstrukciju na slici 6.1 proračunati metodom sila.



Slika 6.1

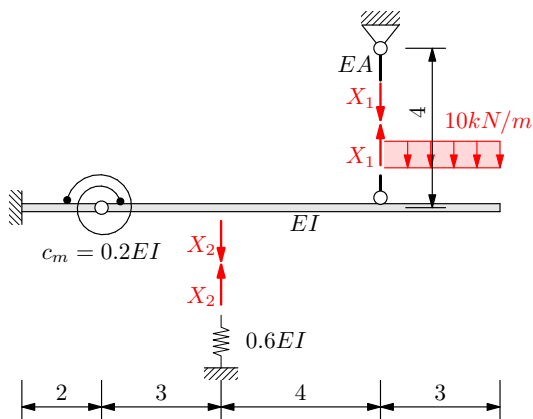
Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i vertikalni štap ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem. Opruga c_m na zglobu ne znači ništa drugo do koncentričnu promjenu krutosti na konzoli.

Možemo provjeriti i formulom:

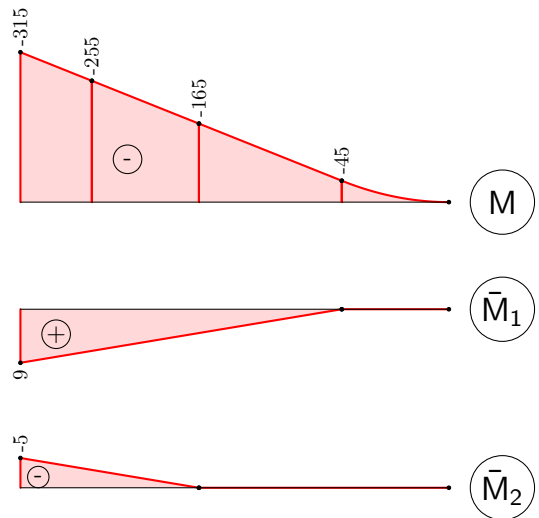
$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 5 - (4 + 2 + 6) = -2$$

gdje dakle ne računamo da imamo čvor u zglobu kod opruge c_m . Ako računamo sa čvorom u zglobu onda imamo i jedan kruti ugao koji formira opruga c_m pa je

$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 6 - (5 + 3 + 6) = -2$$



Slika 6.2: Osnovni sistem



Slika 6.3: Dijagrami momenata na osnovnom sistemu od opterećenja i jediničnih sila

Proračun koeficijenata fleksibilnosti

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 + EI \frac{7 \cdot 7}{c_m} + EI \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{EA} = 501.333$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + EI \frac{3 \cdot 3}{c_m} + EI \frac{1 \cdot 1}{0.6EI} = 88.3333$$

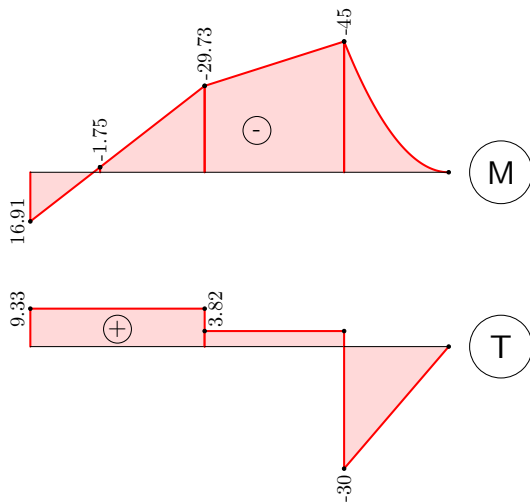
$$EI\delta_{12} = \frac{-5 \cdot 5}{6} (4 + 2 \cdot 9) + EI \frac{7 \cdot (-3)}{c_m} = -196.6667$$

$$EI\Delta_{10} = \frac{9 \cdot 9}{6} (-45 - 2 \cdot 315) + EI \frac{7 \cdot (-255)}{c_m} = -18037.5$$

$$EI\Delta_{20} = \frac{5 \cdot (-5)}{6} (-165 - 2 \cdot 315) + EI \frac{(-3) \cdot (-255)}{c_m} = 7137.5$$

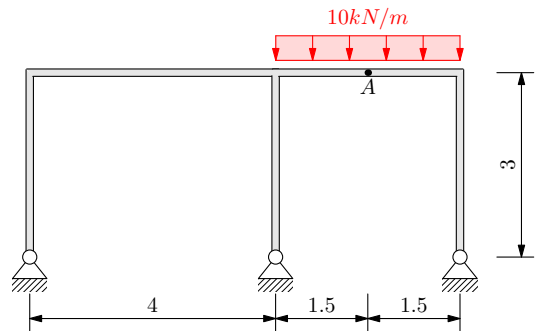
$$\begin{bmatrix} 501.3333 & -196.6667 \\ -196.6667 & 88.3333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18037.5 \\ -7137.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.818 \\ -5.510 \end{bmatrix}$$

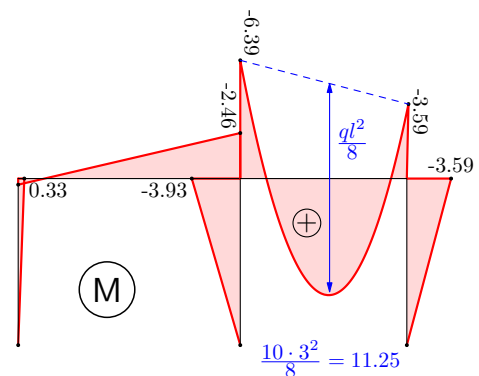


Slika 6.4: Rezultujući dijagram momenata i poprečnih sila.

Zadatak 2 Za konstrukciju na slici 6.5 dat je dijagram momenata na slici 6.6 Proračunati vertikalno pomjeranje tačke A. $EI = 20000kNm^2$. Pretpostaviti da su gredni elementi aksijalno kruti.



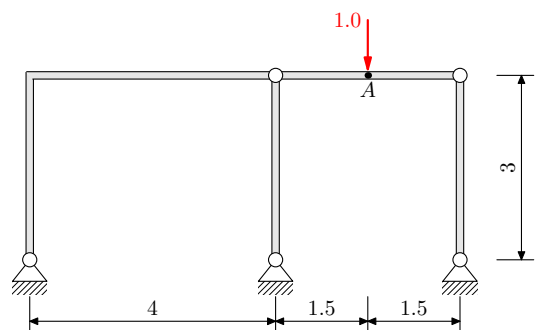
Slika 6.5



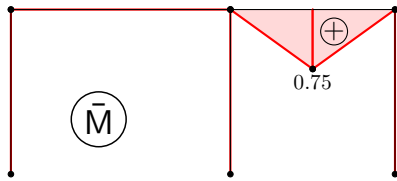
Slika 6.6: Tekst i oznake plavom bojom nisu date na dijagramu momenata na testu.

Rješenje Konstrukcija je statički neodređena pa ćemo za proračun pomjeranja koristiti redukcijski stavak prema kojem od dva stanja sila u MAXWELL-MOHROVOM integralu jedno mora biti na statički neodređenom a jedno može biti na bilo kojem statički određenom nosaču. Statički neodređeno stanje je dato dijagramom momenata na slici 6.6, pa ćemo samo odrediti dijagram momenata od jedinične sile na bilo kojem osnovnom sistemu.

Na slici 6.7 je dat osnovni sistem.



Slika 6.7



Slika 6.8

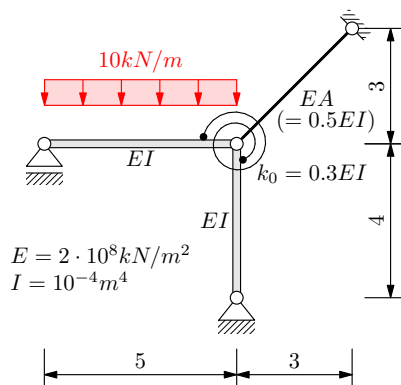
Premnožićemo parabolu veličine u tjemenu $\frac{ql^2}{8}$ sa dva trougla što je dato u tablicama od čega ćemo oduzeti proizvod trapeza visina 6.39 i 3.59 sa dva trougla što je takođe dato u tablicama.

$$v_A = \int \frac{M\bar{M}}{EI}$$

$$\begin{aligned} \int M\bar{M} &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 11.25 \cdot 0.75 \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.5) \\ &\quad - \frac{3 \cdot 0.75}{6} ((1 + 0.5) \cdot 6.39 + (1 + 0.5) \cdot 3.59) \\ &= 4.933125 \end{aligned}$$

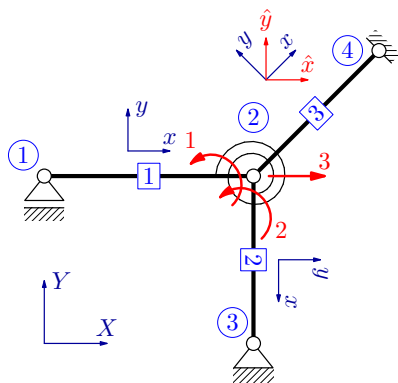
$$v_A = \frac{4.933125}{20000} = 0.0002467m$$

Zadatak 3 Konstrukciju na slici 6.9 proračunati metodom deformacija. Pretpostaviti da su gredni elementi aksijalno kruti.



Slika 6.9

Rješenje Opruga k_0 povezuje vertikalni i horizontalni gredni element pa će oba elementa u zglobu morati imati stepen slobode kretanja



Slika 6.10: Obilježavanje čvorova, štapova i globalnih stepeni slobode kretanja.

$$\begin{array}{l}
 \boxed{1} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \left[\begin{array}{c} 3EI \\ l \end{array} \right] \end{array} \\
 \boxed{2} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\
 \boxed{3} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \left[\begin{array}{cccc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array} \right] \frac{EA}{l_3} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{opruga} \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \left[\begin{array}{cc} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{5} + k_0 = 0.9EI$$

$$K_{12} = -k_0 = -0.3EI$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{4} + k_0 = 1.05EI$$

$$K_{23} = \frac{3EI}{4^2} = 0.1875EI$$

$$K_{33} = \frac{3EI}{4^3} + \frac{EA}{l_3} c^2 = 0.046875EI + 0.0589EI = 0.1058EI$$

Matrica krutosti

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 0.9000 & -0.3000 & 0 \\ -0.3000 & 1.0500 & 0.1875 \\ 0 & 0.1875 & 0.1058 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Za kruto vezan štap 1

$$M_1^* = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{10 \cdot 5^2}{12} = -20.8333$$

$$M_2^* = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{10 \cdot 5^2}{12} = 20.8333$$

Za štap 1 zglobno vezan u čvoru 1

$$M_2^o = M_2^* - 0.5 \cdot M_1^* = 20.8333 - 0.5 \cdot (-20.8333) = 31.25$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 31.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dobijaju se pomjeranja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.0020172 \\ 0.0008432 \\ -0.0014943 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{s}_1^o = \left[\frac{3 \cdot 20000}{5} \right] [0.0020172] - [31.25] = [-7.044]$$

Štap 2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^2 &= \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{3 \cdot 20000}{4^3} & \frac{3 \cdot 20000}{4^2} \\ \frac{3 \cdot 20000}{4^2} & \frac{3 \cdot 20000}{4} \end{array} \right] \begin{bmatrix} -0.0014943 \\ 0.0008432 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.761 \\ 7.044 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Štap 3

Transformacija pomjeranja čvora $\hat{\mathbf{u}}_n$ iz globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem (vektor pomjeranja \mathbf{u}_n^e).

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \mathbf{u}_n^e \Rightarrow \mathbf{u}_n^e = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_n$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \begin{bmatrix} \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_n^e = \begin{bmatrix} u_{nx}^e \\ u_{ny}^e \end{bmatrix}$$

$$(\alpha = 45^\circ)$$

Pomjeranje čvora 2 u lokalnom koordinatnom sistemu štapa 3

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^3 &= \begin{bmatrix} u_{2x}^3 \\ u_{2y}^3 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0014943 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.0010566 \\ 0.0010566 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

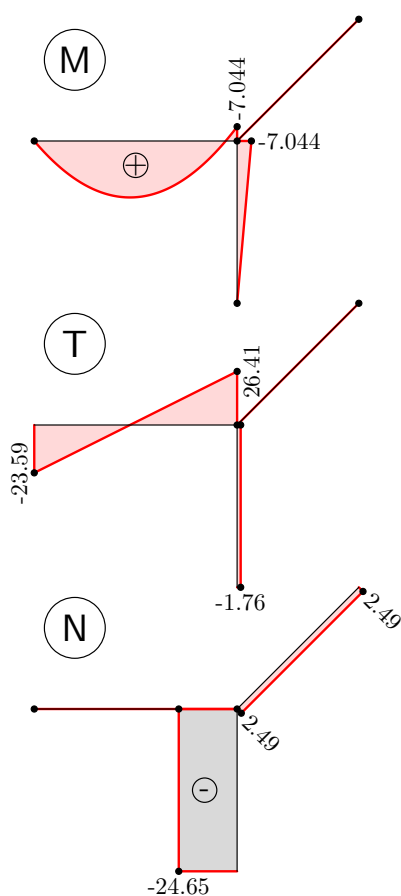
Vektor pomjeranja čvorova štapa 3 u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix} u_{1x}^3 \\ u_{2x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0010566 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^3 &= \mathbf{K}^3 \mathbf{u}^3 = \frac{10^4}{4.243} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0010566 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2.49 \\ 2.49 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sila u opruzi

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{K}^0 \mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} 6000 & -6000 \\ -6000 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0020172 \\ 0.0008432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.044 \\ -7.044 \end{bmatrix}$$

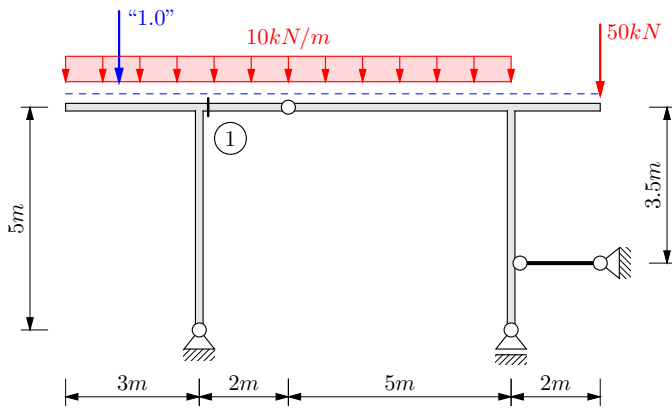


Slika 6.11: Dijagrami presječnih sila.

6.2 Test 05.07.2014

Zadatak 1 Za konstrukciju na slici 6.12:

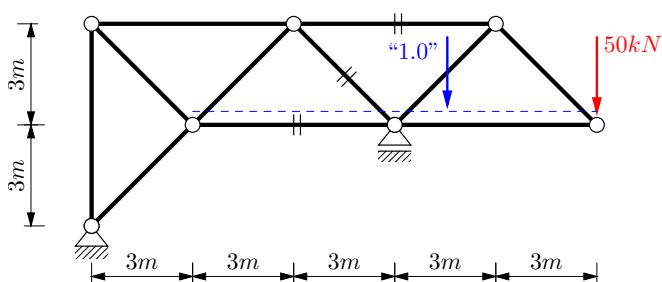
- odrediti stepen statičke neodređenosti,
- proračunati reakcije, presječne sile i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije, momenat, poprečnu i normalnu silu u presjeku 1,
- kontrolisati presječne sile u presjeku 1 proračunate pod tačkom b) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom c).



Slika 6.12

Zadatak 2 Za konstrukciju na slici 6.13:

- proračunati reakcije i presječne sile u označenim štapovima,
- proračunati i nacrtati uticajne linije u označenim štapovima,
- kontrolisati presječne sile u označenim štapovima proračunate pod tačkom a) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom b).

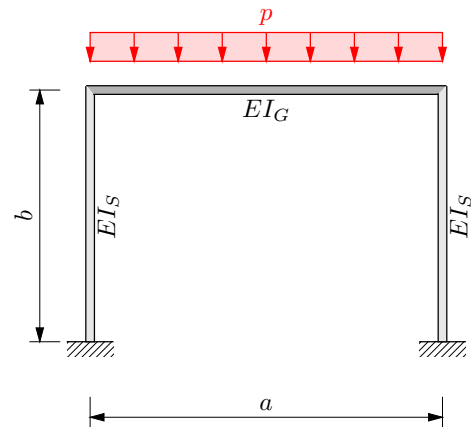


Slika 6.13

Zadatak 3 Za konstrukciju i opterećenje na slici 6.14 skicirati dijagram momenata i deformisani oblik konstrukcije za slučajeva:

- $\frac{EI_G}{EI_S} = 0$

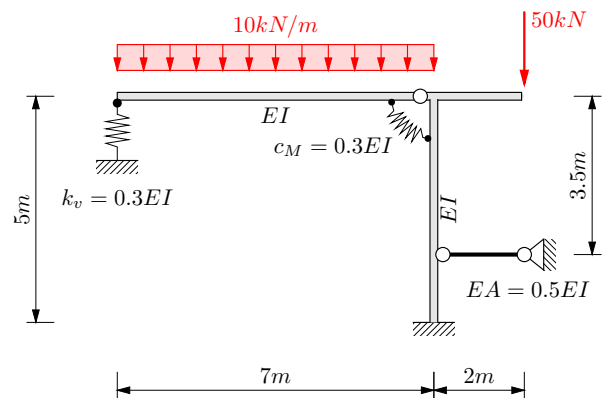
$$\text{b) } \frac{EI_G}{EI_S} = \infty$$



Slika 6.14

Zadatak 4 Konstrukciju na slici 6.15 proračunati metodom sila. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti.

- Odrediti osnovni sistem i proračunati statičke nepoznate,
- Proračunati reakcije i proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.15

Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i horizontalni štap ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem.

$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 6 - (5 + 3 + 6) = -2$$

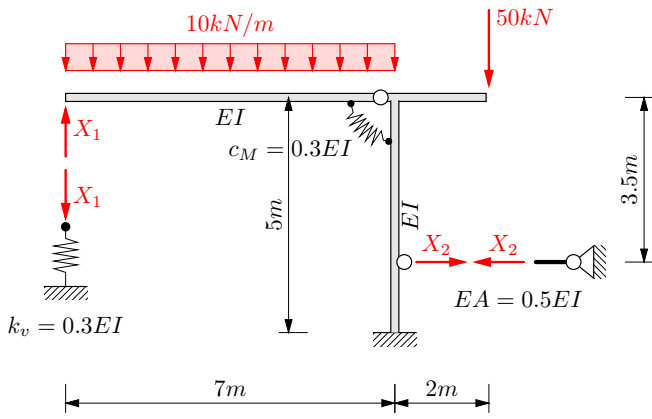
Proračun koeficijenta fleksibilnosti

Osnovni sistem je dat na slici 6.16.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 5 \cdot 7 + EI \frac{7 \cdot 7}{c_M} + EI \frac{1 \cdot 1}{k_v} = 526.0$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5 + EI \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{0.5EI} = 5.125$$

$$EI\delta_{12} = \frac{1.5 \cdot 1.5}{2} \cdot 7 = 7.875$$



Slika 6.16: Osnovni sistem

$$EI\Delta_{10} = \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 7 \cdot (-245) + 7 \cdot 5 \cdot (-145) + EI \cdot \frac{7 \cdot (-245)}{0.3EI}$$

$$= -13792.917$$

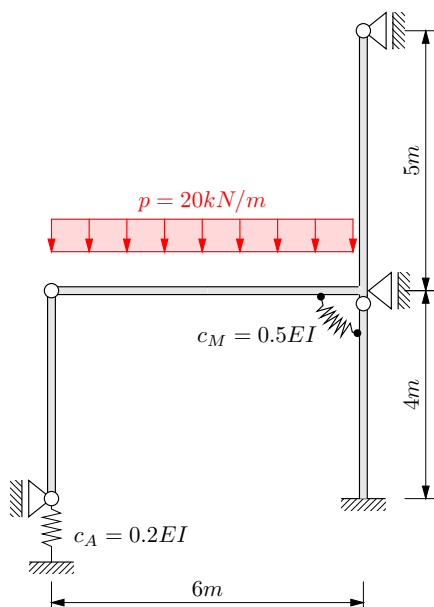
$$EI\Delta_{20} = \frac{1.5 \cdot 1.5}{2} \cdot (-145) = -163.125$$

$$\begin{bmatrix} 526.000 & 7.875 \\ 7.875 & 5.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13792.917 \\ 163.125 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.352 \\ -8.663 \end{bmatrix}$$

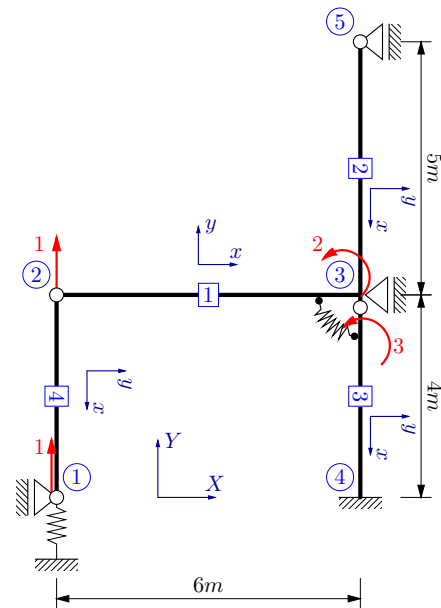
Zadatak 5 Konstruksiju na slici 6.17 proračunati metodom deformacija. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$

- Odrediti i nacrtati stepene slobode kretanja,
- Proračunati pomjeranja u prethodno definisanim stepenima slobode kretanja,
- Proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.17

Rješenje Opruga c_M povezuje vertikalni gredni element 3 sa ostalim elementima u čvoru 3 pa ćemo štapu 3 uvesti stepen slobode kretanja 3, dok ostali elementi u čvoru 3 imaju stepen slobode kretanja 2. U ovom slučaju za štap 3 ne izbacujemo rotacioni stepen slobode kretanja statičkom kondenzacijom, već štap 3 posmatramo kao kruto vezan na oba kraja.



Slika 6.18

$$\begin{bmatrix} \text{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \text{1} & 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ \text{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{0} & -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ \text{2} & 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{6^3}$$

$$\begin{bmatrix} \text{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \text{0} & 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ \text{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{0} & -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ \text{2} & 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{5^3}$$

$$\begin{bmatrix} \text{3} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \text{0} & 12 & 6 \cdot 4 & -12 & 6 \cdot 4 \\ \text{3} & 6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ \text{0} & -12 & -6 \cdot 4 & 12 & -6 \cdot 4 \\ \text{0} & 6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{4^3}$$

$$\begin{bmatrix} \text{opruga} & 2 & 3 \\ \text{2} & 0.5EI & -0.5EI \\ \text{3} & -0.5EI & 0.5EI \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{6^3} + 0.2EI = 4277.7778$$

$$K_{12} = \frac{3EI}{6^2} = 1666.6667$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{6} + \frac{3EI}{5} + 0.5EI = 32000$$

$$K_{23} = -0.5EI = -10000$$

$$K_{33} = 0.5EI + \frac{4EI}{4} = 1.5EI = 30000$$

Matrica krutosti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4277.7778 & 1666.6667 & 0 \\ 1666.6667 & 32000.0000 & -10000.0000 \\ 0 & -10000.0000 & 30000.0000 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Ekvivalentno čvrno opterećenje za kruto vezan štap 1

$$M_2^\bullet = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{20 \cdot 6^2}{12} = -60$$

$$M_3^\bullet = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60$$

$$T_2^\bullet = -\frac{20 \cdot 6}{2} = -60$$

$$T_3^\bullet = -\frac{20 \cdot 6}{2} = -60$$

Za štap 1 zglobno vezan u čvoru 2

$$M_3^\circ = M_3^\bullet - 0.5 \cdot M_2^\bullet = 60 - 0.5 \cdot (-60) = 90$$

$$T_2^\circ = T_2^\bullet - 1.5 \cdot \frac{M_2^\bullet}{6} = -60 - 1.5 \cdot \frac{-60}{6} = -45$$

$$T_3^\circ = T_3^\bullet + 1.5 \cdot \frac{M_2^\bullet}{6} = -60 + 1.5 \cdot \frac{-60}{6} = -75$$

Globalni vektor sila

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -45 \\ 90 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dobijaju se pomjeranja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -0.0120148 \\ 0.0038381 \\ 0.0012794 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{s}_1^\circ$$

$$= \frac{20000}{6^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0120148 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0038381 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -45 \\ 0 \\ -75 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48.059 \\ 0 \\ 71.941 \\ -71.644 \end{bmatrix}$$

Štap 2

$$\mathbf{f}^2 = \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2 =$$

$$= \frac{20000}{5^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0038381 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.211 \\ 0 \\ -9.211 \\ 46.057 \end{bmatrix}$$

Štap 3

$$\mathbf{f}^3 = \mathbf{K}^3 \mathbf{u}^3 =$$

$$= \frac{20000}{4^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 4 & -12 & 6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ -12 & -6 \cdot 4 & 12 & -6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0012794 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.596 \\ 25.588 \\ -9.596 \\ 12.794 \end{bmatrix}$$

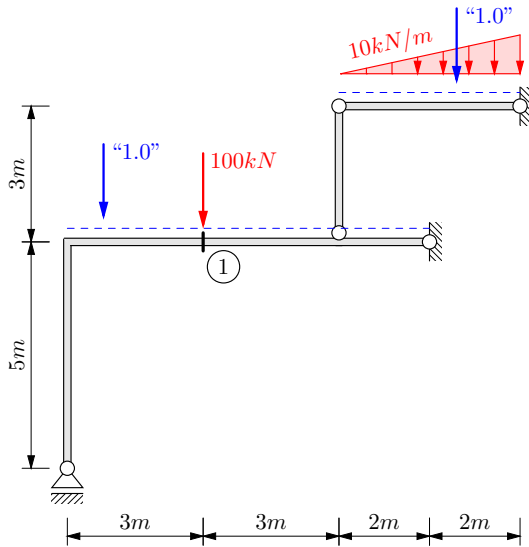
Sila u opruzi

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{K}^0 \mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} 10000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038381 \\ 0.0012794 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.587 \\ -25.587 \end{bmatrix}$$

6.3 Test 20.09.2014

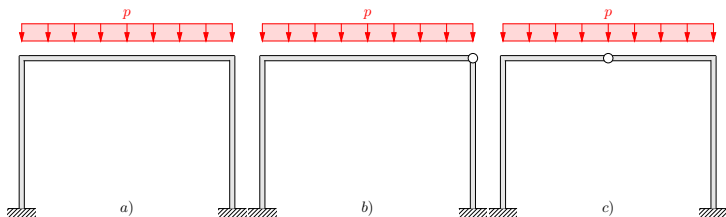
Zadatak 6 Za konstrukciju na slici 6.19:

- odrediti stepen statičke neodređenosti,
- proračunati reakcije, presječne sile i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije, momenat, poprečnu i normalnu silu u presjeku 1,
- kontrolisati presječne sile u presjeku 1 proračunate pod tačkom b) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom c).



Slika 6.19

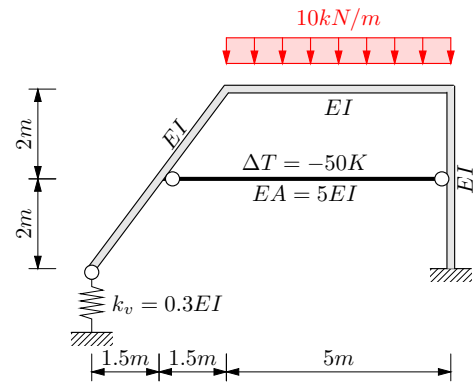
Zadatak 7 Za konstrukcije i opterećenje na slici 6.20 skicirati dijagram momenata i deformisani oblik konstrukcije



Slika 6.20

Zadatak 8 Konstrukciju na slici 6.21 proračunati metodom sila. Za gređne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000kNm^2$

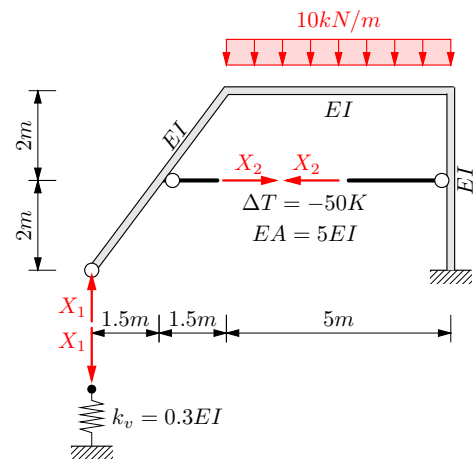
- Odrediti osnovni sistem i proračunati statičke nepoznate,
- Proračunati reakcije i proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



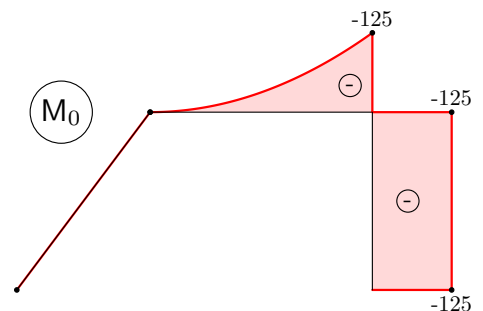
Slika 6.21

Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i horizontalni štap ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem.

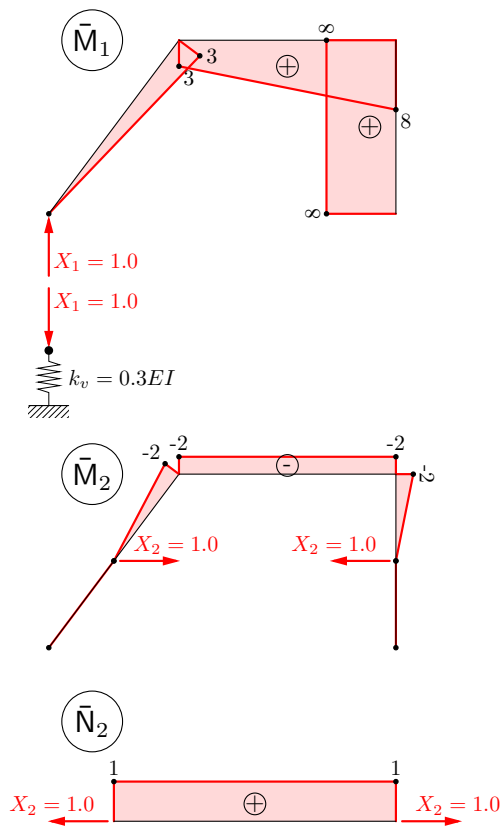
$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 6 - (6 + 4 + 4) = -2$$



Slika 6.22: Osnovni sistem



Slika 6.23: Dijagram momenata na osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja.



Slika 6.24: Dijagrami momenata i normalne sile u zatezi od jediničnih sila na osnovnom sistemu

Proračun koeficijenta fleksibilnosti

Osnovni sistem je dat na slici 6.22 a dijagrami momenata na slikama 6.23 i 6.24.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 3) + 4 \cdot 8 \cdot 8 + EI \frac{1 \cdot 1}{k_v} = 436$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 2.5 \cdot (-2)(-2) + 5 \cdot (-2)(-2) + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2)(-2) + EI \cdot \frac{1 \cdot 1}{5EI} \cdot 6.5 = 27.3$$

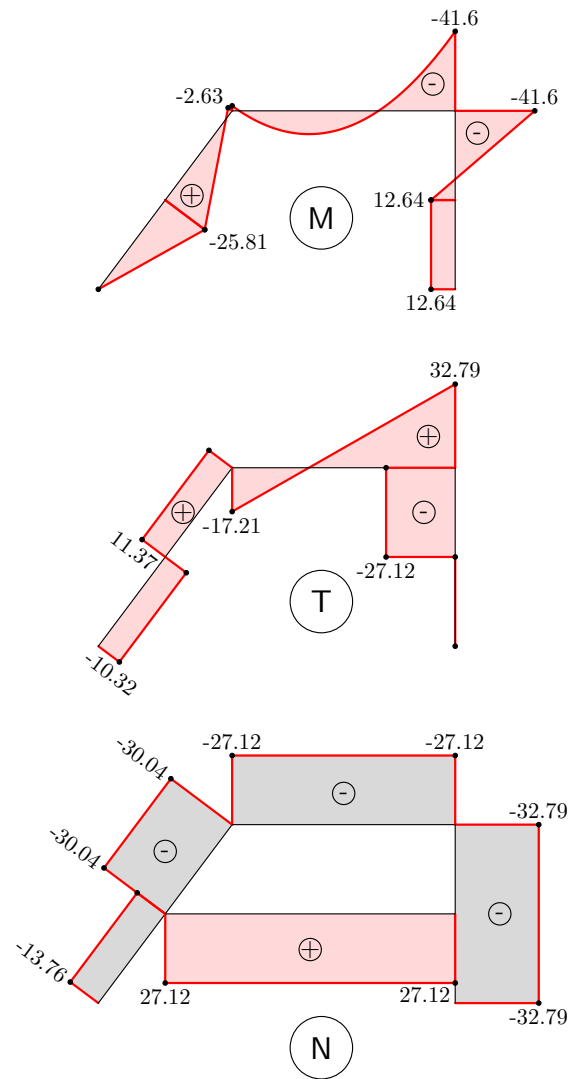
$$EI\delta_{12} = \frac{2.5 \cdot (-2)}{6} \cdot (1.5 + 2 \cdot 3) + \frac{5 \cdot (-2)}{2} \cdot (3 + 8) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 8 = -77.25$$

$$EI\Delta_{10} = \frac{5 \cdot (-125)}{12} \cdot (3 + 3 \cdot 8) + 4 \cdot (-125) \cdot 8 = -5406.25$$

$$EI\Delta_{20} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot (-125)(-2) + \frac{2 \cdot (-2)}{2} \cdot (-125) + 1 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot (-50) \cdot 6.5 \cdot EI = 588.667$$

$$\begin{bmatrix} 436.0 & -77.25 \\ -77.25 & 27.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5406.25 \\ -588.667 \end{bmatrix}$$

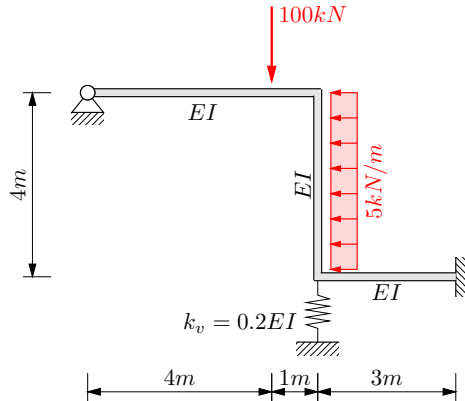
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.205 \\ 27.122 \end{bmatrix}$$



Slika 6.25: Dijagrami presječnih sila

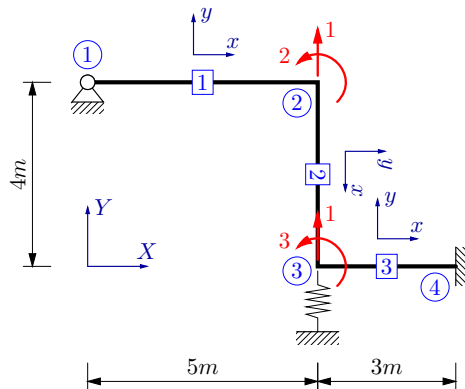
Zadatak 9 Konstrukciju na slici 6.26 proračunati metodom deformacija. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000kNm^2$

- Odrediti i nacrtati stepene slobode kretanja,
- Proračunati pomjeranja u prethodno definisanim stepenima slobode kretanja,
- Proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.26

Rješenje



Slika 6.27: Označavanje čvorova štapova i stepeni slobode kretanja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ 2 & 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{5^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 6 \cdot 4 & -12 & 6 \cdot 4 \\ 2 & 6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ 0 & -12 & -6 \cdot 4 & 12 & -6 \cdot 4 \\ 3 & 6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{4^3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 6 \cdot 3 & -12 & 6 \cdot 3 \\ 3 & 6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 \\ 0 & -12 & -6 \cdot 3 & 12 & -6 \cdot 3 \\ 0 & 6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{3^3}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{5^3} + \frac{12EI}{3^3} + 0.2EI = 13368.889$$

$$K_{12} = -\frac{3EI}{5^2} = -2400.0$$

$$K_{13} = \frac{6EI}{3^2} = 13333.333$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{4} = 32000.0$$

$$K_{23} = \frac{2EI}{4} = 10000.0$$

$$K_{33} = \frac{4EI}{4} + \frac{4EI}{3} = 46666.667$$

Matrica krutosti

$$K = \begin{bmatrix} 13368.889 & -2400.000 & 13333.333 \\ -2400.000 & 32000.000 & 10000.000 \\ 13333.333 & 10000.000 & 46666.667 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Ekvivalentno čvorno opterećenje za kruto vezan štap 1

$$M_1^* = -P \frac{ab^2}{l^2} = -100 \frac{4 \cdot 1}{25} = -16.0$$

$$M_2^* = P \frac{a^2b}{l^2} = 100 \frac{4^2 \cdot 1}{25} = 64.0$$

$$T_1^* = -\frac{Pb^2}{l^3} (3a + b) = -\frac{100 \cdot 1}{5^3} (3 \cdot 4 + 1) = -10.4$$

$$T_2^* = -\frac{Pa^2}{l^3} (a + 3b) = -\frac{100 \cdot 4^2}{5^3} (4 + 3 \cdot 1) = -89.6$$

Za štap 1 zglobno vezan u čvoru 1

$$M_2^o = M_2^* - 0.5 \cdot M_1^* = 64 - 0.5 \cdot (-16) = 72$$

$$T_1^o = T_1^* - 1.5 \cdot \frac{M_1^*}{5} = -10.4 - 1.5 \cdot \frac{-16}{5} = -5.6$$

$$T_2^o = T_2^* + 1.5 \cdot \frac{M_1^*}{5} = -89.6 + 1.5 \cdot \frac{-16}{5} = -94.4$$

$$f^{e1} = \begin{bmatrix} -94.4 \\ 72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekvivalentno čvorno opterećenje za štap 2

$$M_2^* = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{5 \cdot 4^2}{12} = -6.6667$$

$$M_3^* = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{5 \cdot 4^2}{12} = 6.6667$$

$$f^{e2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.6667 \\ 6.6667 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

$$f = f^{e1} + f^{e2} = \begin{bmatrix} -94.4000 \\ 65.3333 \\ 6.6667 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $Ku = f$ dobijaju se pomjeranja

$$u = \begin{bmatrix} -0.0098512 \\ 0.0004058 \\ 0.0028705 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

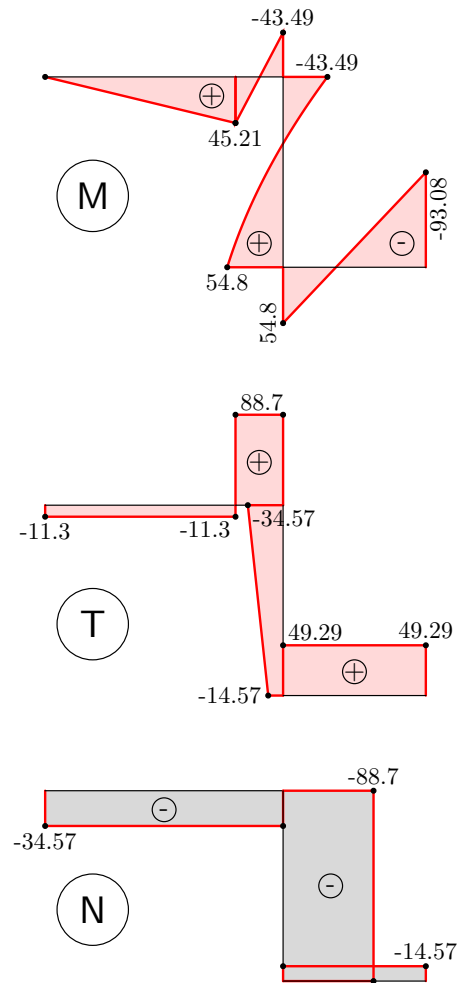
$$\begin{aligned} f^1 &= K^1 u^1 - s_1^0 \\ &= \frac{20000}{5^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0098512 \\ 0.0004058 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5.6 \\ 0 \\ -94.4 \\ 72 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11.302 \\ 0 \\ 88.698 \\ -43.488 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Štap 2

$$\begin{aligned} f^2 &= K^2 u^2 - s_2^0 \\ &= \frac{20000}{4^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 4 & -12 & 6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ -12 & -6 \cdot 4 & 12 & -6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 & -6 \cdot 4 & 4 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0004058 \\ 0 \\ 0.0028705 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 \\ -6.6667 \\ -10 \\ 6.6667 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 34.572 \\ 43.488 \\ -14.572 \\ 54.802 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Štap 3

$$\begin{aligned} f^3 &= K^3 u^3 = \\ &= \frac{20000}{3^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 3 & -12 & 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 \\ -12 & -6 \cdot 3 & 12 & -6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0098512 \\ 0.0028705 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -49.293 \\ -54.802 \\ 49.293 \\ -93.076 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

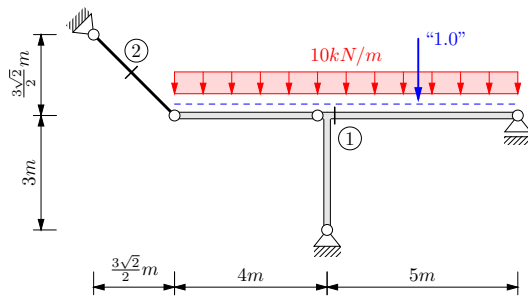


Slika 6.28: Dijagrami presječnih sila

6.4 Test 21.02.2015

Zadatak 10 Za konstrukciju na slici 6.29:

- odrediti stepen statičke neodređenosti,
- proračunati reakcije, presječne sile i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije i presječne sile u označenim presjecima,
- kontrolisati presječne sile u označenim presjecima proračunate pod tačkom b) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom c).



Slika 6.29

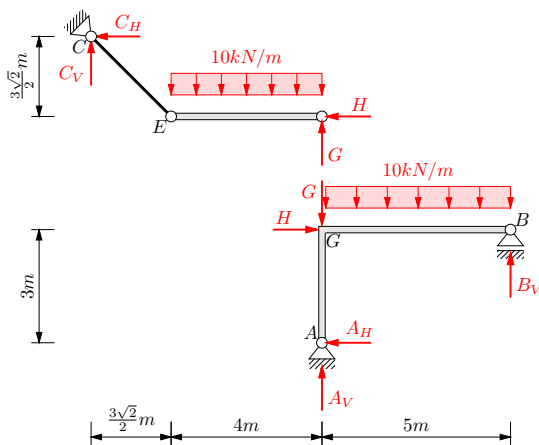
Rješenje

a)

$$-SSN = SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 5 - (4 + 1 + 5) = 0$$

Nepomjerljiv statički određen nosač.

b)



Slika 6.30

Reakcije

$$\hat{E}_D : G \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow G = 20 \text{ kN}$$

$$\uparrow : G + C_V - 10 \cdot 4 = 0 \Rightarrow C_V = 20 \text{ kN}$$

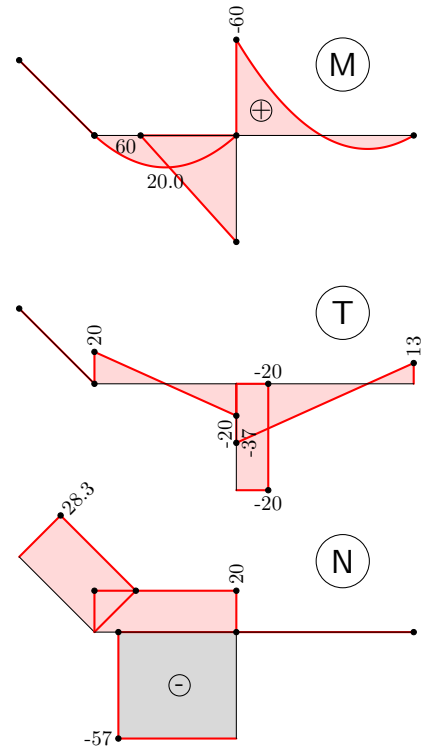
$$\hat{E}_L : C_H \cdot l - C_V \cdot l = 0 \Rightarrow C_H = C_V = 20 \text{ kN}$$

$$\rightarrow : -C_H - H = 0 \Rightarrow H = -C_H = -20 \text{ kN}$$

$$\hat{A} : B_V \cdot 5 - 10 \cdot 5 \cdot 2.5 - H \cdot 3 = 0 \Rightarrow B_V = 13 \text{ kN}$$

$$\rightarrow : H - A_H = 0 \Rightarrow A_H = -20 \text{ kN}$$

$$\hat{B} : A_V \cdot 5 + A_H \cdot 3 - 10 \cdot 5 \cdot 2.5 - G \cdot 5 = 0 \Rightarrow A_V = 57 \text{ kN}$$



Slika 6.31

c) Uticajne linije

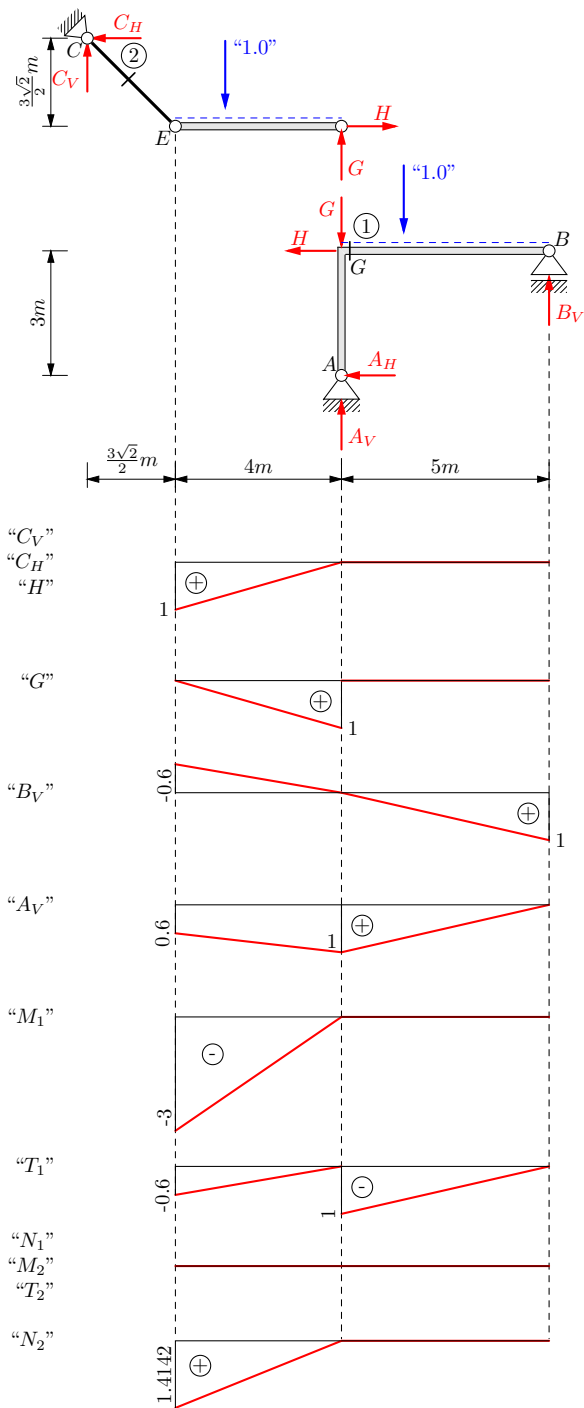
Uticajne linije su date na slici 6.32.

d) Integracija uticajnih linija

$$M_1 = \frac{-3 \cdot 4}{2} \cdot 10 = -60.0 \text{ kNm}$$

$$T_1 = \frac{-0.6 \cdot 4}{2} \cdot 10 + \frac{-1 \cdot 5}{2} \cdot 10 = -37 \text{ kN}$$

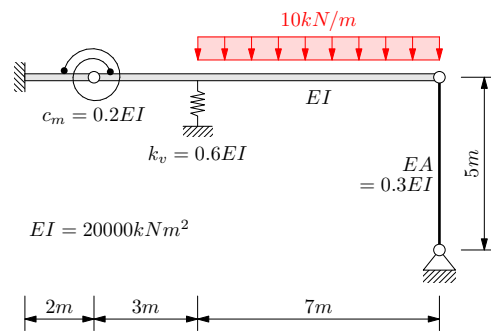
$$N_2 = \frac{1.4142 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 28.28 \text{ kN}$$



Slika 6.32

Zadatak 11 Konstrukciju na slici 6.36 proračunati metodom sila. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000kNm^2$

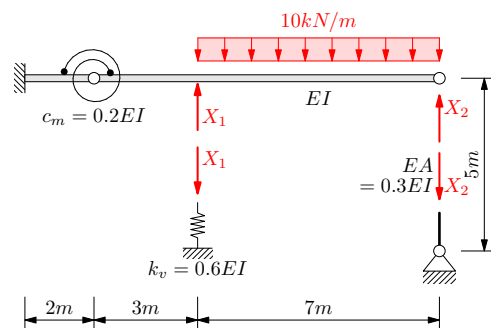
- Odrediti osnovni sistem i proračunati statičke nepoznate,
- Proračunati reakcije i proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



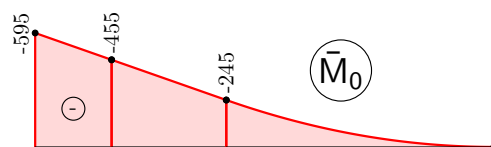
Slika 6.33

Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i vertikalni štap ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem.

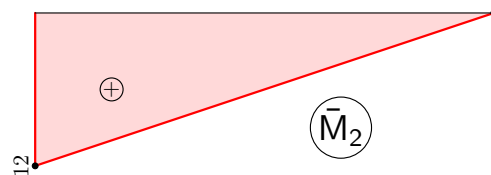
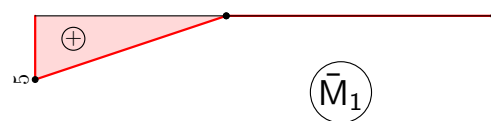
$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 5 - (4 + 2 + 6) = -2$$



Slika 6.34: Osnovni sistem



Slika 6.35: Dijagram momenata na osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja.



Slika 6.36: Dijagrami momenata od jediničnih sila na osnovnom sistemu

Proračun koeficijenta fleksibilnosti

Osnovni sistem je dat na slici 6.34 a dijagrami momenata na slikama 6.36 i 6.36.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + EI \frac{3 \cdot 3}{c_m} + EI \frac{1 \cdot 1}{k_v} = 88.33$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 + EI \frac{10 \cdot 10}{c_m} + EI \frac{-1 \cdot (-1) \cdot 5}{EA} = 1092.667$$

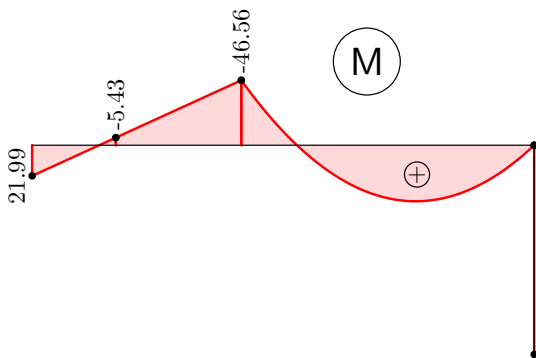
$$EI\delta_{12} = \frac{5 \cdot 5}{6} \cdot (2 \cdot 12 + 7) + EI \frac{3 \cdot 10}{c_m} = 279.167$$

$$EI\Delta_{10} = \frac{5 \cdot 5}{6} (2 \cdot (-595) + (-245)) + EI \frac{-455 \cdot 3}{c_m} = -12804.17$$

$$EI\Delta_{20} = \frac{5}{6} (2 \cdot (-595) \cdot 12 + (-595) \cdot 7) + 2 \cdot (-245) \cdot 7 + (-245) \cdot 12 + \frac{1}{4} 7 \cdot 7 \cdot (-245) + EI \frac{-455 \cdot 10}{c_m} = -46430.417$$

$$\begin{bmatrix} 88.33 & 279.167 \\ 279.167 & 1092.667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12804.167 \\ 46430.417 \end{bmatrix}$$

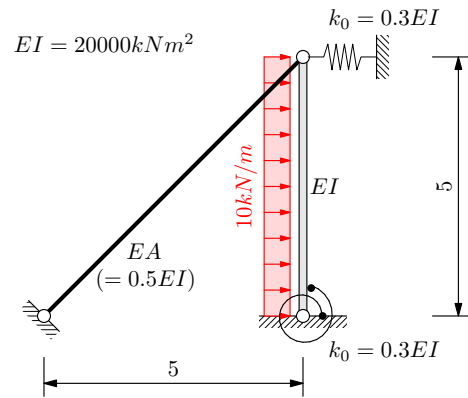
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55.36 \\ 28.35 \end{bmatrix}$$



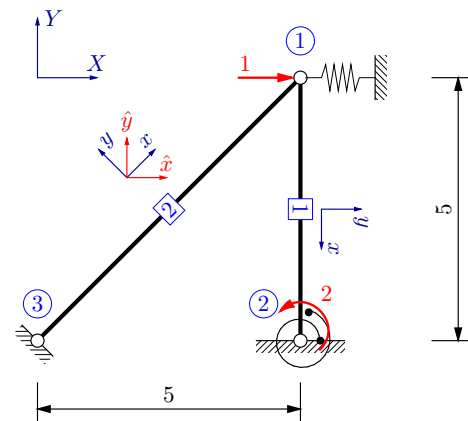
Slika 6.37: Dijagrami momenata

Zadatak 12 Konstrukciju na slici 6.38 proračunati metodom deformacija. Za grede elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000kNm^2$

- Odrediti i nacrtati stepene slobode kretanja,
- Proračunati pomjeranja u prethodno definisanim stepenima slobode kretanja,
- Proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.38

Rješenje

Slika 6.39: Označavanje čvorova štapova i stepeni slobode kretanja. U čvoru 1 nećemo proračunavati rotaciju kraja grede 1, pa gredu 1 možemo posmatrati kao zglobno vezanu u čvoru 1 a kruto u čvoru 2. U slučaju da hoćemo proračunati rotaciju kraja grede 1 u čvoru 1 u okviru proračuna globalnog vektora pomjeranja uveli bismo rotacioni SSK u čvoru 1, i gredu 1 posmatrali kao kruto vezanu na oba kraja. Pošto je prema datom zadatku gređa aksijalno kruta nemamo vertikalni SSK u čvoru 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ 2 & 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{5^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ 0 & cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ 1 & -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ 0 & -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \frac{EA}{l_2}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{5^3} + \frac{EA}{l_2} \cdot c^2 + 0.3EI = 7187.1068$$

$$K_{12} = \frac{3EI}{5^2} = 2400.0$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{5} + 0.3EI = 18000.0$$

Matrica krutosti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7187.107 & 2400.000 \\ 2400.000 & 18000.000 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Ekvivalentno čvorno opterećenje za kruto vezan štap 1

$$M_1^\bullet = \frac{ql^2}{12} = \frac{10 \cdot 5^2}{12} = 20.833$$

$$M_2^\bullet = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10 \cdot 5^2}{12} = -20.833$$

$$T_1^\bullet = \frac{ql}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25.0$$

$$T_2^\bullet = \frac{ql}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25.0$$

Za štap 1 zglobno vezan u čvoru 1

$$M_2^\circ = M_2^\bullet - 0.5 \cdot M_1^\bullet = -20.833 - 0.5 \cdot 20.833 = -31.25$$

$$T_1^\circ = T_1^\bullet - 1.5 \cdot \frac{M_1^\bullet}{5} = 25.0 - 1.5 \cdot \frac{20.833}{5} = 18.75$$

$$T_2^\circ = T_2^\bullet + 1.5 \cdot \frac{M_1^\bullet}{5} = 25.0 + 1.5 \cdot \frac{20.833}{5} = 31.25$$

Globalni vektor sila

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 18.75 \\ -31.25 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dobijaju se pomjeranja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.0033372 \\ -0.0021811 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^1 &= \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{s}_1^\circ \\ &= \frac{20000}{5^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 & 0 & -3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0033372 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0021811 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18.75 \\ 0 \\ 31.25 \\ -31.25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -22.383 \\ 0 \\ -27.617 \\ 13.086 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Štap 2

Transformacija pomjeranja čvora $\hat{\mathbf{u}}_n$ iz globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem (vektor pomjeranja \mathbf{u}_n^e).

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \mathbf{u}_n^e \Rightarrow \mathbf{u}_n^e = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_n$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \begin{bmatrix} \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_n^e = \begin{bmatrix} u_{nx}^e \\ u_{ny}^e \end{bmatrix}$$

($\alpha = 45^\circ$)

Pomjeranje čvora 1 u lokalnom koordinatnom sistemu štapa 2

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^2 &= \begin{bmatrix} u_{1x}^2 \\ u_{1y}^2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0033372 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0023598 \\ -0.0023598 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vektor pomjeranja čvorova štapa 2 u lokalnom koordinatnom sistemu

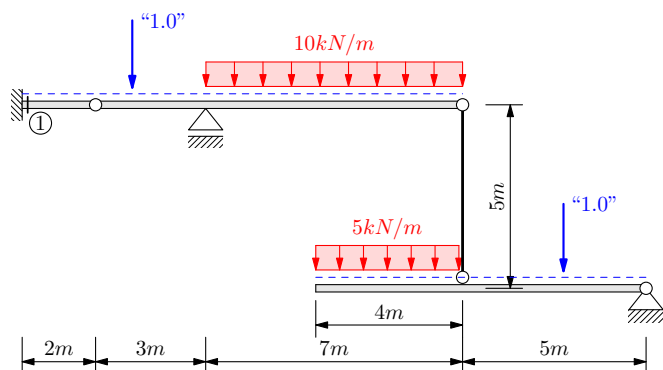
$$\mathbf{u}^2 = \begin{bmatrix} u_{2x}^2 \\ u_{2y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0023598 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^2 &= \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2 = \frac{10^4}{7.071} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0023598 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3.34 \\ 3.34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.5 Test 30.04.2015

Zadatak 13 Za konstrukciju na slici 6.40:

- odrediti stepen statičke neodređenosti,
- proračunati reakcije, presječne sile i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije i presječne sile u označenom presjeku,
- kontrolisati presječne sile u označenim presjecima proračunate pod tačkom b) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom c).



Slika 6.40

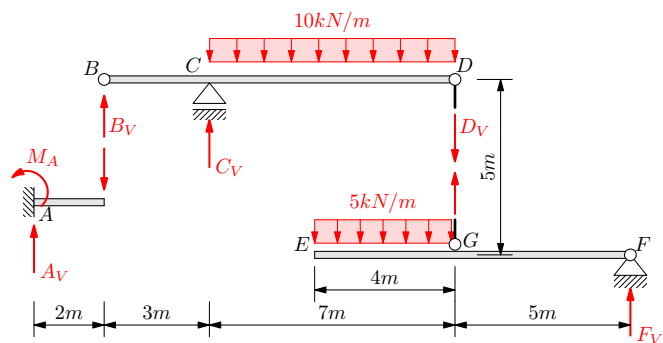
Rješenje

a) Provjera stepena statičke određenosti

$$-SSN = SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 7 - (6 + 2 + 6) = 0$$

Nepomjerljiv statički određen nosač.

b) Reakcije i presječne sile



Slika 6.41

Reakcije

$$\hat{F}: D_V \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 7 = 0 \quad \Rightarrow D_V = 28 \text{ kN}$$

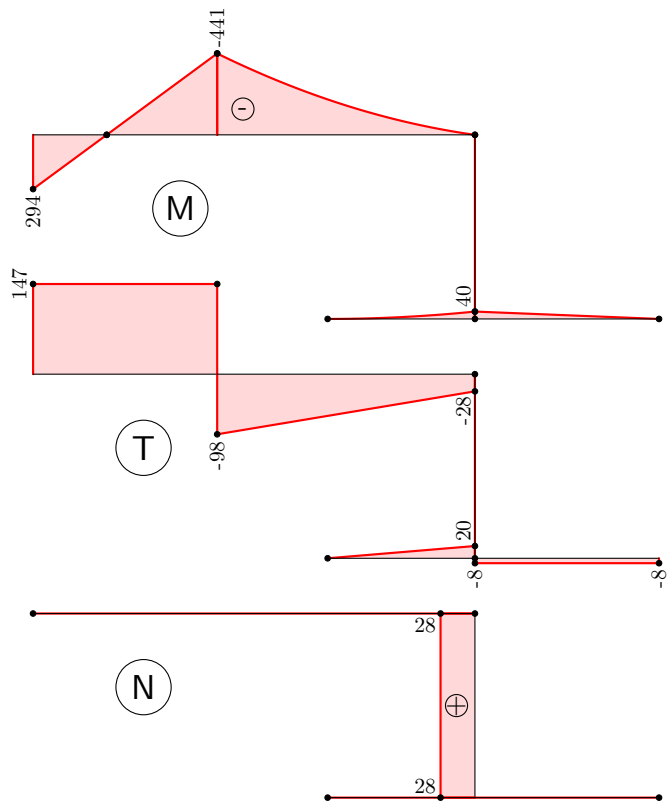
$$\hat{G}: F_V \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow F_V = -8 \text{ kN}$$

$$\hat{B}: D_V \cdot 10 + 10 \cdot 7 \cdot 6.5 - C_V \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow C_V = 245 \text{ kN}$$

$$\hat{C}: B_V \cdot 3 + 10 \cdot 7 \cdot 3.5 + D_V \cdot 7 = 0 \quad \Rightarrow B_V = -147 \text{ kN}$$

$$\hat{A}: M_A - B_V \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow M_A = -294 \text{ kNm}$$

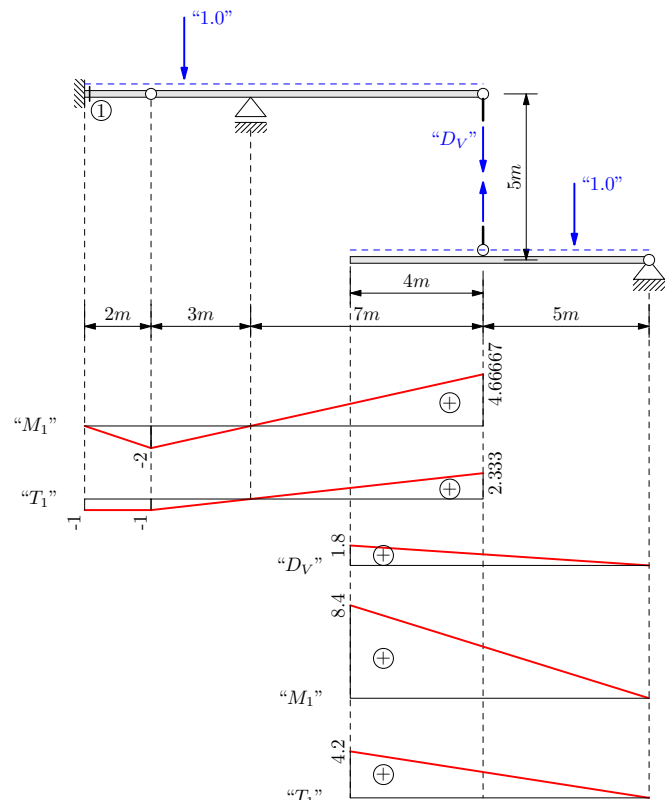
$$\uparrow: A_V - B_V = 0 \quad \Rightarrow A_V = -147 \text{ kN}$$



Slika 6.42

c) Uticajne linije

Uticajne linije su date na slici 6.43.



Slika 6.43

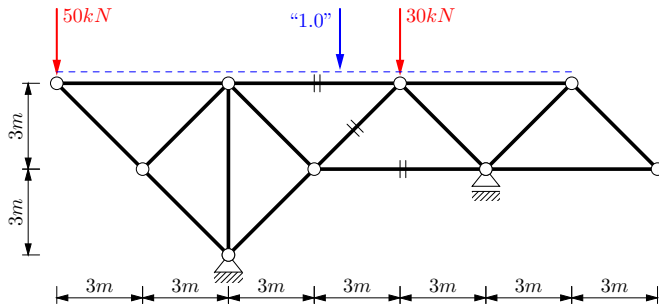
d) Integracija uticajnih linija

$$M_1 = \frac{7 \cdot 4.6667}{2} \cdot 10 + \frac{8.4 + 4.667}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 294 \text{ kNm}$$

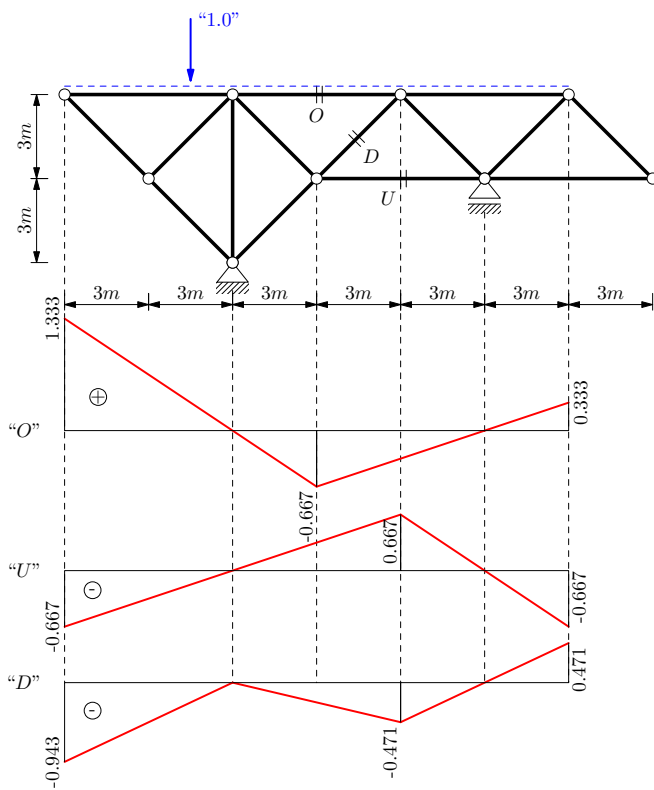
$$T_1 = \frac{7 \cdot 2.333}{2} \cdot 10 + \frac{4.2 + 2.333}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 147 \text{ kN}$$

Zadatak 14 Za konstrukciju na slici 6.44:

- proračunati reakcije i presječne sile označenim štapovima,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije i presječne sile u označenim štapovima,
- kontrolisati presječne sile u označenim presjecima proračunate pod tačkom a) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom b).



Slika 6.44



Slika 6.45

d) Integracija uticajnih linija

$$O = 50 \cdot 1.333 + 30 \cdot (-0.333) = 56.67 \text{ kN}$$

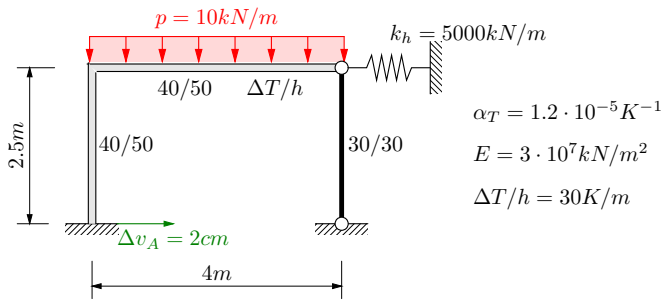
$$U = 50 \cdot (-0.667) + 30 \cdot 0.667 = -13.34 \text{ kN}$$

$$D = 50 \cdot (-0.943) + 30 \cdot (-0.471) = -61.28 \text{ kN}$$

6.6 Test 12.06.2015

Zadatak 15 Konstruksiju na slici 6.46 proračunati metodom sila. Za grede elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti.

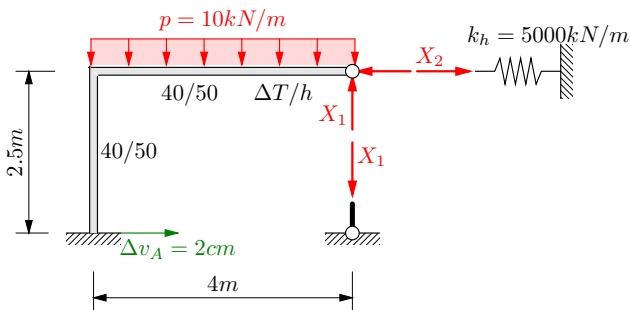
- Odrediti osnovni sistem i proračunati statičke nepoznate, od opterećenja p , neravnomjerne promjene temperature $\Delta T/h$, i pomjeranja oslonca Δv_A ,
- Proračunati reakcije i proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila za svaki slučaj opterećenja,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije za svaki slučaj opterećenja.



Slika 6.46

Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i vertikalni štap ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem.

$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 4 - (3 + 1 + 6) = -2$$



Slika 6.47: Osnovni sistem

$$I_{grede} = \frac{0.4 \cdot 0.5^3}{12} = 0.0041667$$

$$A_{stuba} = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$$

Proračun koeficijentata fleksibilnosti

Osnovni sistem je dat na slici 6.47 a dijagrami momenata na slici 6.48.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 2.5 \cdot 4 \cdot 4 + EI \frac{1 \cdot 2.5}{EA} = 61.449$$

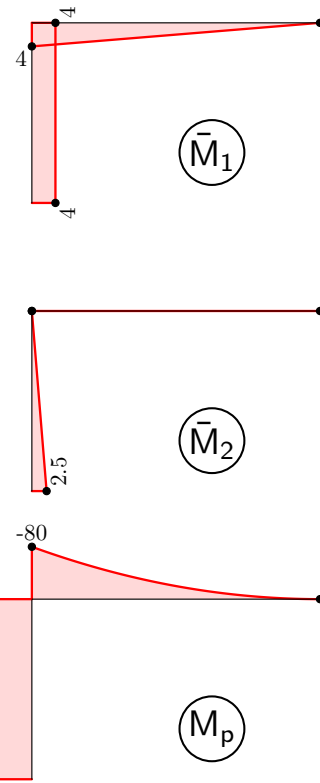
$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 2.5 \cdot 2.5 \cdot 2.5 + EI \cdot \frac{1 \cdot 1}{k_h} = 30.2083$$

$$EI\delta_{12} = \frac{2.5 \cdot 2.5}{2} \cdot 4 = 12.5$$

Opterećenje p

$$EI\Delta_{1p} = 4 \cdot 2.5 \cdot (-80) + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-80) \cdot 4 = -1120.0$$

$$EI\Delta_{2p} = \frac{2.5 \cdot 2.5 \cdot (-80)}{2} = -250.0$$



Slika 6.48: Dijagrami momenata od jediničnih sila i vanjskog opterećenja na osnovnom sistemu

$$\begin{bmatrix} 61.449 & 12.5 \\ 12.5 & 30.2083 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1120.0 \\ 250.0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.063 \\ 0.801 \end{bmatrix}$$

Pomjeranje oslonca Δv_A

$$EI\Delta_{1v} = 0$$

$$EI\Delta_{2v} = -0.02 \cdot 1 \cdot EI = -2500.0$$

$$\begin{bmatrix} 61.449 & 12.5 \\ 12.5 & 30.2083 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2500.0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.382 \\ 90.365 \end{bmatrix}$$

Neravnomjerna promjena temperature $\Delta T/h$

$$EI\Delta_{1T} = EI \cdot \int \alpha_t \frac{\Delta T}{h} \bar{M}_1 ds = EI \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 360.0$$

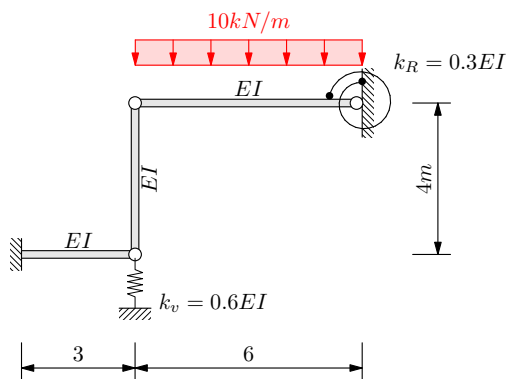
$$EI\Delta_{2T} = 0.0$$

$$\begin{bmatrix} 61.449 & 12.5 \\ 12.5 & 30.2083 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -360.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.40 \\ 2.65 \end{bmatrix}$$

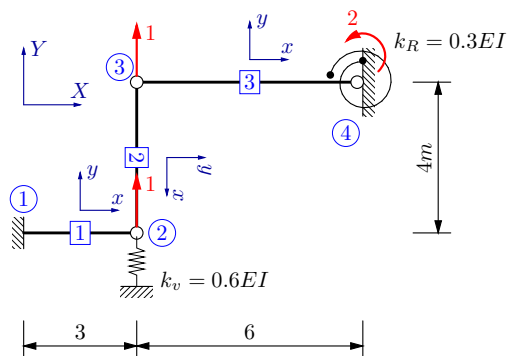
Zadatak 16 Konstrukciju na slici 6.49 proračunati metodom deformacija. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000kNm^2$

- Odrediti i nacrtati stepene slobode kretanja,
- Proračunati pomjeranja u prethodno definisanim stepenima slobode kretanja,
- Proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.49

Rješenje



Slika 6.50: Označavanje čvorova štapova i stepeni slobode kretanja .

$$\mathbf{1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 \cdot 2 & -3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2^2 & -3 \cdot 2 & 0 \\ -3 & -3 \cdot 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EI}{2^3}$$

$$\mathbf{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{6^3}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{2^3} + \frac{3EI}{6^3} + 0.6EI = 19777.778$$

$$K_{12} = \frac{3EI}{6^2} = 1666.6667$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{6} + 0.3EI = 16000.0$$

Matrica krutosti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 19777.778 & 1666.667 \\ 1666.667 & 16000.000 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Ekvivalentno čvorno opterećenje za kruto vezan štap 3

$$M_1^* = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10 \cdot 6^2}{12} = -30.0$$

$$M_2^* = \frac{ql^2}{12} = \frac{10 \cdot 6^2}{12} = 30.0$$

$$T_1^* = -\frac{ql}{2} = -\frac{10 \cdot 6}{2} = -30.0$$

$$T_2^* = -\frac{ql}{2} = -\frac{10 \cdot 6}{2} = -30.0$$

Za štap 3 zglobno vezan u čvoru 3

$$M_2^{\circ} = M_2^* - 0.5 \cdot M_1^* = 30 - 0.5 \cdot (-30) = 45.0$$

$$T_1^{\circ} = T_1^* - 1.5 \cdot \frac{M_1^*}{6} = -30.0 - 1.5 \cdot \frac{-30}{6} = -22.5$$

Globalni vektor sila

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -22.5 \\ 45.0 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dobijaju se pomjeranja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -0.0013868 \\ 0.0029570 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^1 &= \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1 \\ &= \frac{20000}{2^3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \cdot 2 & -3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2^2 & -3 \cdot 2 & 0 \\ -3 & -3 \cdot 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0013868 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10.401 \\ 20.802 \\ -10.401 \\ 0.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

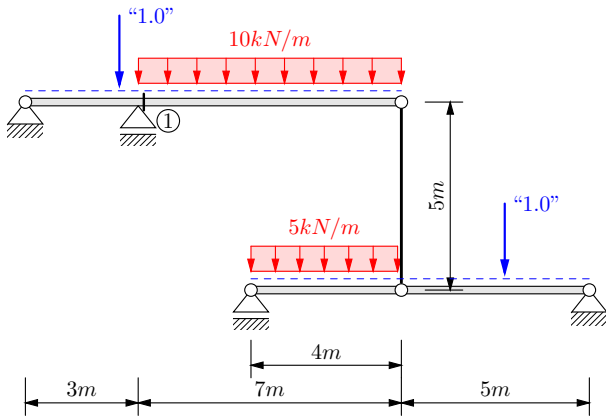
Štap 3

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^3 &= \mathbf{K}^3 \mathbf{u}^3 - \mathbf{s}_3^{\circ} \\ &= \frac{20000}{6^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0013868 \\ 0.0029570 \\ 0.0029570 \\ 0.0029570 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -22.5 \\ 0.0 \\ -37.5 \\ 45.0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27.043 \\ 0.000 \\ 32.957 \\ -17.742 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.7 Test 27.06.2015

Zadatak 17 Za konstrukciju na slici 6.51:

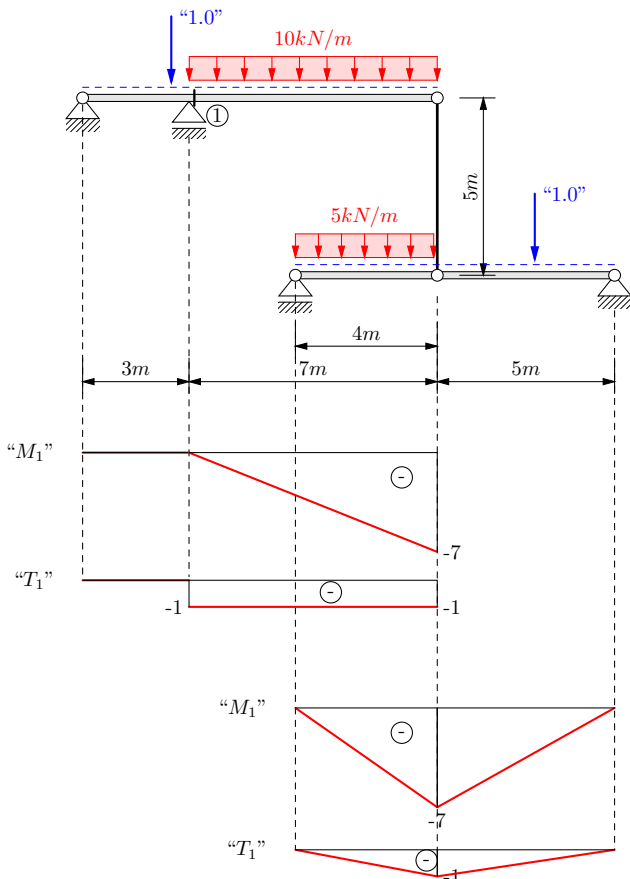
- odrediti stepen statičke neodređenosti,
- proračunati reakcije, presječne sile i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- proračunati i nacrtati uticajne linije za reakcije i presječne sile u označenom presjeku,
- kontrolisati presječne sile u označenim presjecima proračunate pod tačkom b) koristeći uticajne linije proračunate pod tačkom c).



Slika 6.51

Rješenje

Uticajne linije



Slika 6.52

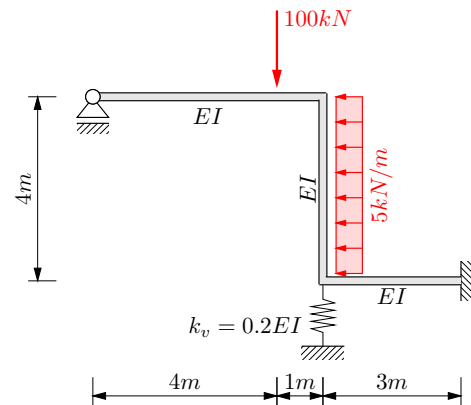
d) Integracija uticajnih linija

$$M_1 = \frac{7 \cdot (-7)}{2} \cdot 10 + \frac{4 \cdot (-7)}{2} \cdot 5 = -315.0 \text{ kNm}$$

$$T_1 = 7 \cdot (-1) \cdot 10 + \frac{4 \cdot (-1)}{2} \cdot 5 = -80 \text{ kN}$$

Zadatak 18 Konstrukciju na slici 6.53 proračunati metodom sila. Za gredne elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti.

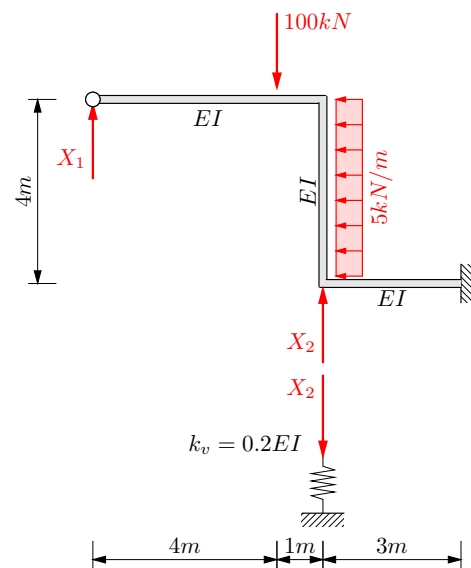
- Odrediti osnovni sistem i proračunati statičke nepoznate, od opterećenja,
- Proračunati reakcije i proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.53

Rješenje Konstrukcija je dva puta statički neodređena, dakle uklanjajući oprugu k_v i oslonac lijevo ostaje nam konzola koja predstavlja osnovni sistem.

$$SSK = 2n - (s + c + r) = 2 \cdot 4 - (3 + 2 + 5) = -2$$



Slika 6.54: Osnovni sistem

Proračun koeficijenta fleksibilnosti

Osnovni sistem je dat na slici 6.54 a dijagrami momenata na slici 6.55.

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{3}{6}(2 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 5) = 270.6667$$

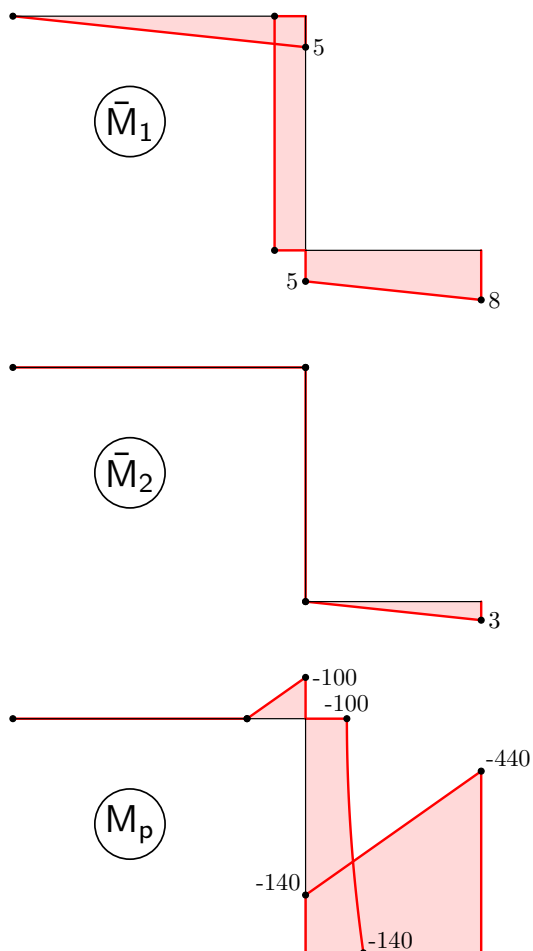
$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + EI \cdot \frac{1 \cdot 1}{k_v} = 14.0$$

$$EI\delta_{12} = \frac{3 \cdot 3}{6} \cdot (5 + 2 \cdot 8) = 31.5$$

Opterećenje p

$$EI\Delta_{1p} = \frac{1 \cdot (-100)}{6} \cdot (4 + 2 \cdot 5) + 5 \cdot 4 \cdot (-100) + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-40) \cdot 5 + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot (-140) + (-140) \cdot 8 + 2 \cdot (-440) \cdot 8 + 5 \cdot (-440)) = -8380.0$$

$$EI\Delta_{2p} = \frac{3 \cdot 3}{6} \cdot (-140 \cdot 2 + (-440)) = -1530.0$$



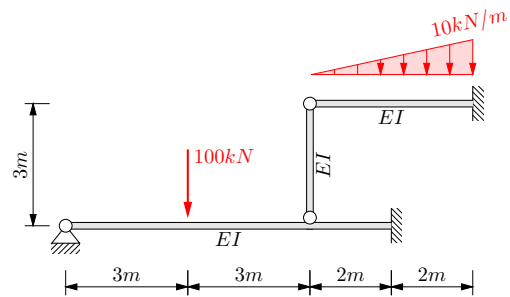
Slika 6.55: Dijagrami momenata od jediničnih sila i vanjskog opterećenja na osnovnom sistemu

$$\begin{bmatrix} 270.6667 & 31.5 \\ 31.5 & 14.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8380.0 \\ 1530.0 \end{bmatrix}$$

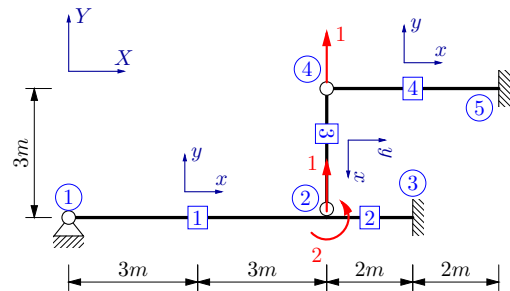
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.7132 \\ 53.6809 \end{bmatrix}$$

Zadatak 19 Konstrukciju na slici 6.56 proračunati metodom deformacija. Za grede elemente pretpostaviti da su aksijalno kruti. $EI = 20000 \text{ kNm}^2$

- Odrediti i nacrtati stepene slobode kretanja,
- Proračunati pomjeranja u prethodno definisanim stepenima slobode kretanja,
- Proračunati i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- Nacrtati deformisani oblik konstrukcije.



Slika 6.56

Rješenje

Slika 6.57: Označavanje čvorova štapova i stepeni slobode kretanja.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ 2 & 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{6^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 6 \cdot 2 & -12 & 6 \cdot 2 \\ 2 & 6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 \\ 0 & -12 & -6 \cdot 2 & 12 & -6 \cdot 2 \\ 0 & 6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{2^3}$$

$$4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 & 0 & -3 \cdot 4 & 3 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{4^3}$$

$$K_{11} = \frac{3EI}{6^3} + \frac{12EI}{2^3} + \frac{3EI}{4^3} = 31215.278$$

$$K_{12} = -\frac{3EI}{6^2} + \frac{6EI}{2^2} = 28333.333$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{6} + \frac{4EI}{2} = 50000.0$$

Matrica krutosti

$$K = \begin{bmatrix} 31215.278 & 28333.333 \\ 28333.333 & 50000.000 \end{bmatrix}$$

Globalni vektor sila

Ekvivalentno čvorno opterećenje za kruto vezan štap 1

$$M_1^\bullet = -\frac{Pl}{8} = -\frac{100 \cdot 6}{8} = -75.0$$

$$M_2^\bullet = \frac{Pl}{8} = \frac{100 \cdot 6}{8} = 75.0$$

$$T_1^\bullet = -\frac{P}{2} = -\frac{100}{2} = -50.0$$

$$T_2^\bullet = -\frac{P}{2} = -\frac{100}{2} = -50.0$$

Za štap 1 zglobno vezan u čvoru 1

$$M_2^\circ = M_2^\bullet - 0.5 \cdot M_1^\bullet = 75 - 0.5 \cdot (-75) = 112.5$$

$$T_2^\circ = T_2^\bullet + 1.5 \cdot \frac{M_1^\bullet}{6} = -50.0 + 1.5 \cdot \frac{-75}{6} = -68.75$$

Ekvivalentno čvorno opterećenje za kruto vezan štap 4

$$M_4^\bullet = -\frac{pl^2}{30} = -\frac{10 \cdot 4^2}{30} = -5.333$$

$$M_5^\bullet = \frac{pl^2}{20} = \frac{10 \cdot 4^2}{20} = 8.0$$

$$T_4^\bullet = -\frac{3pl}{20} = -\frac{3 \cdot 10 \cdot 4}{20} = -6.0$$

$$T_5^\bullet = -\frac{7pl}{20} = -\frac{7 \cdot 10 \cdot 4}{20} = -14.0$$

Za štap 4 zglobno vezan u čvoru 4

$$T_4^\circ = T_4^\bullet - 1.5 \cdot \frac{M_4^\bullet}{4} = -6.0 - 1.5 \cdot \frac{-5.333}{4} = -4.0$$

Globalni vektor sila

$$f = \begin{bmatrix} -72.75 \\ 112.5 \end{bmatrix}$$

Rješenjem sistema $Ku = f$ dobijaju se pomjeranja

$$u = \begin{bmatrix} -0.0090041 \\ 0.0073523 \end{bmatrix}$$

Proračun presječnih sila na krajevima elemenata

Štap 1

$$\begin{aligned} f^1 &= K^1 u^1 - s_1^\circ \\ &= \frac{20000}{6^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 6 & 0 & -3 \cdot 6 & 3 \cdot 6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0090041 \\ 0.0073523 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -31.25 \\ 0 \\ -68.75 \\ 112.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 46.01 \\ 0 \\ 53.99 \\ -23.97 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Štap 2

$$\begin{aligned} f^2 &= K^2 u^2 \\ &= \frac{20000}{2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 2 & -12 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 \\ -12 & -6 \cdot 2 & 12 & -6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0090041 \\ 0.0073523 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -49.55 \\ 23.97 \\ 49.55 \\ -123.08 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Štap 4

$$\begin{aligned} f^4 &= K^4 u^4 - s_4^\circ \\ &= \frac{20000}{4^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \cdot 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 & 0 & -3 \cdot 4 & 3 \cdot 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0090041 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4.0 \\ 0 \\ -16.0 \\ 10.667 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4.44 \\ 0 \\ 24.44 \\ -44.43 \end{bmatrix} \end{aligned}$$